Despre electrodinamica corpurilor în mişcare
Albert Einstein, 30 Iunie 1905
Tradus de Adrian Buzatu, student la master la univ. McGill, Montreal în Aprilie-Mai 2005.
Multumiri dl. John Walker ce a prezentat traducerea engleză a articolului pe site-ul dumnealui: www.fourmilab.ch

Este ştiut că electrodinamica lui Maxwell (aşa cum este înțeleasă în momentul de față) duce la asimetrii ce par inerente fenomenelor, atunci când este aplicată corpulilor în mişcare. Fenomenul observabil depinde aici numai de mişcarea relativă a conductorului şi magnetului, în timp ce punctul comun de vedere face o distincție netă între cele două cazuri în care ori unul, ori altul din cele două corpuri este în mişcare. Dacă magnetuluu este în mişcare şi conductorul în repaus, atunci apare în jurul magnetului un câmp electric cu o energie bine definită, producând un curent în locurile unde părți din conductor se găsesc. Dar pe de altă parte, dacă magnetul este în repaus şi conductorul în mişcare, nu apare nici un un câmp electric nu apare în vecinătatea magnetului. Găsim totuşi o forță electromotoare, căreia nu îi corespunde nici o energie, dar care, dacă presupunem egalitatea mişcărilor relative în cele două cazuri discutate, produce curenți electrici pe acelaşi traseu şi cu aceeaşi intensitate ca cei produşi în primul caz de forțele electrice.

Exemple de acest gen, precum şi încercările nereuşite de a descoperi o mişcare relativă a Pământului relativ la „mediul luminii", sugerează că atât fenomenele electrodinamicii, cât şi cele ale mecanicii, nu cunosc noțiunea de repaus absolut. Mai degrabă sugerează, aşa cum a fost arătat în primă aproximație pentru cantități mici, aceleaşi legi ale electrodinamicii şi opticii vor fi valabile în orice sistem de referință în care ecuațiile mecanicii sunt valabile. Vom propune ca conjectura (care va fi numită de acum încolo „Principiul relativității") să aibă de acum statutul de postulat. Vom introduce un alt postulat, care este ireconciliabil cu primul numai în aparență, anume că lumina se propagă în spațiul vid cu o viteză finită c care este independentă de starea de mişcarea corpului ce o emite. Aceste două postulate sunt suficiente pentru a obține o teorie simplă şi consistentă a electrodinamicii corpurilor în mişcare, bazată pe teoria lui Maxwell pentru corpurile staționare. Introducerea unui „eter al luminii" se va dovedi superfluă, deoarece punctul de vedere dezvoltat aici nu are nevoie de un „spațiu in repaus absolut" care să aibă proprietăți deosebitem, nici nu trebuie să atribuie un vector de viteză unui punct din spațiu vid în care se produc procese electromagnetice.

Teoria ce trebuie dezvoltată se bazeazp pe cinematgica solidului regid, precum o face orice electrodinamică, deoarece afirmațiile acestei teorii au de a face cu relațiile dintre corpuri rigide (sisteme de coordonate), ceasuri şi procese electromagnetice. Probleme ce le întâlneşte electrodinamica corpurilor în mişcare de acum se datorează unei insuficiente considerare a acestor legături.

I. Partea cinematică

1. Definiția simultaneității

Să considerăm un sistem de referință în care ecuațiie mecanicii lui Newton sunt valabile. Pentru a face prezentarea mai precisă şi să putem distinge verbal acest sistem de referință de altele ce vor fi introduse mai târziu, îl numim „sistem staționar”.

Dacă un punct material este în repaus relativ la acest sistem, poziția lui poate fi definită prin folosirea standardelor rigide de măsurare si metodele geometriei euclidiene şi poate fi exprimată în coordonate carteziene.

Dacă vreum sa descriem *mişcarea* unui punct material, îi exprimăm coordonatele ca funcții de timp. Acum este momentul să fim foarte precişi în a realiza că o asemenea exprimare nu are absolut nici un sens fizic dacă nu exprimăm clar ce înseamnă „timp”. Trebuie să luăm în considerare că toate raționamentele în care timpul între în joc sunt raționamente de *evenimente simultane*. Dacă spun, de exemplu, că „trenul ajunge aici la ora 7”, vreau să spun de fapt aceasta: „Limba mică a ceasului meu arătând spre şapte şi sosirea trenului sunt evenimente simultane”.

Ar părea posibil să scăpăm de aceste probleme în definirea „timpului” dacă substituim „poziția limbii mici a ceasului” cu „timp”. Şi de fapt acesta definiție este satisfăcătoare când ne concentrăm să definim timpul exclusiv în locul unde se găseşte ceasul. Dar nu mai este satisfăcătoare când trebuie să legăm în o serie temporală evenimente ce au loc în locuri diferite, sau, ceea ce este acelaşi lucru, să evaluam când se petrec evenimente ce au loc în locuri depărtate de ceasul nostru.

Ne-am putea mulțumi, bine-nțeles, cu valorile timpului măsurat de un observator staționat împreună cu ceasul la originea coordonatelor şi coordonând respectivele poziții ale limbilor cu semnale de lumină emise de fiecare eveniment caruia îi trebuie măsurat momentul şi care îl ajunge prin spațiu vid. Dar aceasta coordonată are dezavantajul de a nu fi independentă de poziția observatorului cu ceasul, aşa cum ştim din experiență. Ajungem însă la o determinare practică de-a lungul următoarei linii de gândire.

Dacă există un ceas în un punct A din spațiu, un observator în A poate să determine valorile timpului pentru evenimente în imediata vecinătate a lui A, găsind pozițiile limbilor care sunt simultane cu aceste evenimente. Dacă în un punct B din spațiu există un alt ceas care seamănă în toate privințele cu A, un observator situat în B pot determina valorile timpului pentru evenimente în imediata vecinătate a lui B. Dar pentru a putea compara un eveniment in A şi un eveniment în B din punct de vedere temporal avem nevoie de încă o presupunere. Până acum nu am definit decât „timpul A” şi „timpul B”. Nu am definit un „timp” comun pentru A şi B, căci acesta poate fi definit numai dacă prin „definiție” „timpul” necesar luminii pentru a merge de la A la B este egal cu „timpul” necesar luminii pentru a merge de la B la A. Fie o rază de lumină emisă la „timpul A” t_A din A spre B, la „timpul B” t_B ea este reflectată spre A, unde ajunge la „timpul A” t_A’.

Conform definiției, cele două ceasuri se sincronizează dacă $t_B - t_A = t_A' - t_B$.

Presupunem că această definiție a sincronizării nu are contradicții şi este posibilă pentru orice număr de puncte. De asemenea, că următoarele relatii sunt universal valabile:

1. Dacă ceasul din B se sincronizează cu ceasul din A, atunci ceasul din A se sincronizează cu ceasul din B.
2. Dacă ceasul din A sincronizează cu ceasul din B şi ceasul din A se sincronizează şi cu ceasul din C, atunci ceasurile din B şi C se sincronizează unul cu altul.

Astfel, cu ajutorul unor experimente de fizică imaginare, am creat o rețea de ceasuri sincronizate toate, deşi se găsesc în puncte diferite din spațiu. Am obținut astfel o definiție pentru „simultan", „sincronizat" şi „timp". „Timpul" unui eveniment este cel arătat de un ceas în acel moment în care se întâmplă evenimentul, ceas aflat în locul în care se întâmplă experimentul şi care este sincronizat pentru toate măsurările de timp, cu un anumit ceas staționar.

În acord cu experiența, presupunem mai departe cantitatea $\frac{2AB}{t_A' - t_A} = c$ să fie o constantă universală, viteza luminii în spațiul vid.

Este esențial să avem timpul definit cu ajutorul unor ceasuri staționare în sisteme staționare şi cum acest timp este propriu sistemului staționar, îl vom numi „timpului sistemului staționar".

3. Despre relativitatea lungimilor si timpilor.

Următoarele reflecții se bazează pe principiul relativității şi principiul constanței vietezii luminii în vid.

1. Legile ce descriu schimbările sistemelor fizice nu sunt afectate de faptul că aceste schimbări sunt exprimate în unul sau altul dintre două sisteme de coorodonate aflate în mişcare de translație.
2. Orice rază de lumină se mişcă în sistemul „staționar" cu viteza c, indeferent dacă lumina a fost emisă de un corp în repaus sau de un corp în mişcare. Astfel, viteza este lungimea parcursă de lumină împărțită la intervalul de timp, unde aceste este defint ca in 1.

Fie o un băț-riglă pentru măsurat. Bățul este staționar. Fie lungimea lui l atunci când este măsurată de un un alt băț care este tot staționar. Acum să ne imaginăm că axa bățului este orientată de-a lungul axei x a sistemul staționar de coordonate şi că imprimăm apoi bățului o mişcare uniformă de translație cu viteza v de-a lungulul axei x in direcția de creştere a lui x. Ne întrebăm care este lungimea bățului în mişcare şi ne imaginăm că lungimea lui să fie asigurată de urmtoarele două operații:

a. Observatorul se deplasează o dată cu bațul cu care se măsoară şi cu bătul ce trebuie măsurat. Măsoară lungimea bățului în mod direct prin suprapunea bătului cu care se măsoară, în acelaşi fel în care s-ar face când cei trei ar fi toţi în repaus.

b. Cu ajutorul ceasurilor staţionare ce se găsesc în un sistem staţionar şi sincronizate în acord cu 1, observatorul găseşte în ce poziţii ale sistemului staţionar cele două capete ale bățului ce trebuie măsurat se găsesc la un anumit moment. Distanţa între aceste două puncte, măsurată de bățul cu care se măsoară deja folosit, care este în repaus în acest caz, este de asemenea o lungime care poate fi definită ca „lungimea bățului”.

Conform principiului relativităţii, lungimea măsurată prin procedura a) va fi numită „lungimea bățului în sistemul mobil de coordonate” şi trebuie să fie egală cu lungimea l a bățului staţionar.

Lungimea măsurată prin procedura b) va fi numită „lungimea bățului mobil în sistemul staţionar”. O vom determina plecând de la cele două principii şi vom vedea că diferă de l.

Cinematica curentă presupune în mod tacit că lungimile determinate de aceste două operaţii sunt precis egale, sau în alte cuvinte, un corp rigid în mişcare la um moment t poate să fie reprezentat perfect din punct de vedere geometric de *aceaşi* corp *în repaus* la o anumită poziţie.

Ne imaginăm mai departe că la cele două capete A şi B ale bățului se găsesc ceasuri sincronizate cu cele ale sistemului staţionar, adică indicaţiile lor corespund la fiecare moment cu „timpul sistemului staţionar” în locul unde se găsesc ele. Aceste ceasuri sunt aşadar „sincrone în sistemul staţionar”.

Ne imaginăm apoi că există un observator în mişcare cu fiecare din aceste ceasuri şi că fiecare observator aplică ambelor ceasuri criteriile prezentate în 1. pentru a sincroniza cele două ceasuri. Fie o rază de lumină să plece din A la timpul t_A, fie ea reflecată in B la timpul t_B, şi care ajunge în A înapoi la momentul t_A'. Luând în consierare principiul constanţei vitezei luminii, găsim că: $t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c-v}$ and $t_A' - t_B = \frac{r_{AB}}{c+v}$, unde r_{AB} reprezintă lungimea bățului în sistemul staţionar. Observatorii care se mişcă o dată cu bățul în mişcare observă că cele două ceasuri nu erau sincronizate, în timp ce observatori în sistemul staţionar ar declara că cele două ceasuri sunt sincronizate.

Vedem aşadar că nu putem da o valabilitate absolută conceptului de simulateneitate, dar că doua evenimente care sunt simultate văzute din un sistem de coordonate pot să nu mai apară ca fiind simultane atunci când sunt privite dintr-un sistem în mişcare relativă la primul sistem.

3. Teorie a transformării coordonatelor şi timpilor din un sistem staţionar în alt sistem care este în mişcare uniformă de translaţie faţă de primul.

Să considerăm două sisteme de coordonate în un spaţiu „staţionar”, adica doua sisteme, fiecare format din trei linii materiale rigide, perpendiculare una pe alta, care pornesc din acelaşi punct. Fie ca axele X ale celor două sisteme să coincidă, iar axele lor Y şi Z să fie respectiv paralele. Fie ca fiecare sistem să aibă un băţ pentru măsurat şi un număr de ceasuri şi fie ca cele două beţe de măsurat, precum şi toate ceasurile, să fie identice în toate aspectele.

Fie ca originea sistemului k să aibă o viteză constantă v de-a lungul axei x în direcţia lui x crescător al unui alt sistem K şi fie ca această viteză să fie comunicată către axele coordonatelor, către băţul de măsurat relevant şi către ceasuri. Pentru fiecare timp al sistemului staţionar K va exista o poziţie a axelor sistemului mobil şi din motive de simetrie putem presupune că mişcarea lui k este în aşa fel încât axele sistemului mobil sunt la timpul t (acest „t” denotă întotdeauna timpul sistemului staţionar) paralel cu axele sistemului staţionar.

Ne imaginăm acum ca spaţiul să fie măsurat din sistemul staţionar K folosind un băt de măsurat staţionar, iar din sistemul mobil k cu un al băţ de măsurat care se mişcă o dată cu sistemul. Astfel obţinem coordonatele x, y, z şi ξ, η, ζ. Mai departe, fie ca timpul t al sistemului staţionar să fie determinat în toate punctele în care există ceasuri prin metode de sincronizare aşa cum am văzut în 1. De asemenea, fie timpul τ al sistemului mobil poate fi determinat în toate punctele sistemului mobil în care se găsesc ceasuri în repaus relativ la sistemul la care se aplică metoda semnalelor de lumină între puncte în care se găsesc ceasurile de al doilea tip ?, aşa cum e prezentat în 1.

Pentru fiecare sistem de valori x, y, z, t care defineşte în mod unic un eveniment în spaţiu şi timp în sistemul staţionar, există un sistem ξ, η, ζ, τ care determină evenimentul relativ la sistemul k şi acum sarcina noastră este să găsim sistemul de ecuaţii care leagă aceste cantităţi.

În primul rând, e clar că situaţia trebuie să fie *lineară*, datorită proprietăţilor de omogeneitate ce le atribuim spaţiului şi timpului.

Daca punem $x' = x - vt$, este clar că un punct în repaus în sistemul k trebuie să aibă un sistem de valori x’, y, z independente de timp. Mai întâi definim τ ca o funcţie de x’, y, z, t. Pentru aceasta trebuie să exprimăm în ecuaţii că τ nu este altceva decât suma datelor ceasurilor în repaus în sistemul k, care au fost sincronizate în acord cu regula prezentată în 1.

Din originea sistemului k fie o rază emisă la timul τ_0 de-a lungul axei X către x’, iar la momentul τ_1 este reflectată acolo spre originea sistemului de coordonate, ajungând acolo la un timp τ_2. Trebuie atunci să avem $\frac{\tau_0 + \tau_2}{2} = \tau_1$. Introducând argumentele funcţiei r şi aplicând principiul de constanţă a vitezei luminii în sistemul staţionar:

$$\frac{1}{2}\left[r(0,0,0,t) + r\left(0,0,0,t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v}\right)\right] = r\left(x',0,0,t + \frac{x'}{c-v}\right)$$

Astfel, dacă x este ales să fie infinitezimal,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial \tau}{\partial t} \text{ or}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Trebuie remarcat că în loc de origine a coordonatelor puteam alege oricare alt punct pentru punctul de origine a razei şi că, prin urmare, ecuația obținută este valabilă pentru toate punctele x', y, z.

Un raționament analog poate fi aoplicat axelor Y şi Z, păstrând în atenție că lumina este propagată mere de-a lungul acestor axe, când este văzut din sistemul staționar, cu viteze $\sqrt{c^2 - v^2}$. Astfel obținem:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 .$$

Deoarece τ este o funcție lineară, rezultă din aceste ecuații că $\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right)$, unde a este o funcție $\Phi(v)$ pentru moment necunoscută şi unde pentru simplitate este presupus că la originea lui k, τ=0 când t=0.

Cu ajutorul acestui rezultat putem determina uşor cantitățile ξ, η, ζ exprimând în ecuații ca lumina se propagă cu viteza c şi când este măsurată în sistemul mobil (aşa cum o cere principiul constanței vitezii luminii şi principiul relativității). Pentru o rază de lumină emisă la τ=0 în direcția lui ξ crescător,

$$\xi = c\tau \qquad \text{or } \xi = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right).$$

Dar raza se miscă relativ la punctul inițial al lui k, când este măsurată în sistemul staționar, cu viteza c-v, astfel încât: $\frac{x'}{c - v} = t$. Dacă inserăm această valoare a lui t în ecuații pentru ξ, obținem: $\xi = a\left(\frac{c^2}{c^2 - v^2} x'\right)$.

În mod analog, când considerăm razele deplasându-se de-a lungul celorlalte două axe, găsim: $\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right)$, când $\frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = t$, $x' = 0$.

Astfel, $\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} y$ and $\zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} z$.

Substituind valoarea lui x', obținem:

$$\tau = \Phi(v)\beta\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$\xi = \Phi(v)\beta(x - vt)$$
$$\eta = \Phi(v)y$$
$$\zeta = \Phi(v)z, where$$
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Φ este o funcție de v care nu este determinată încă. Dacă nu se face nici o presupunere despre poziția inițială a sistemului mobil şi despre punctul zero al lui τ, o constantă aditivă trebuie adăugată în partea dreaptă a fiecăreia din cele patru ecuații.

Trebuie acum să demonstrăm că fiecare rază de lumină se propagă cu viteza c când este măsurată în sistemul mobil, dacă fiecare rază de lumină se propagă cu viteza c în un sistem staționar aşa cum am presupus. Încă nu am oferit o dovadă că principiul constanței vitezei este compatibil cu principiul relativității.

La acelaşi timp t=τ=0, când originea sistemul de coorodate este comun celor două sisteme, fie o undă sferică să fie emisă de acolo şi să se propage cu viteza c în sistemul K. Dacă (x,y,z) este un punct abia ajuns de această undă, atunci $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$. Transforând această ecuație cu ajutorul ecuațiilor noastre de transformare obținem după o simplă calculare: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2$. Aşadar, unde noastră este tot o undă sferică, cu aceeaşi viteză c, atunci când este văzută din sistemul mobil. Aceasta arată ce cele două principii sunt compatibile 5)

În ecuațiile de transformare intră o funcție Φ de v, pe care o vom determina acum.

Pentru acest scop, introducem un al treilea sistem de coordonate K' care este in o stare de translație paralelă cu axa Ξ față de sistemul k, astfel ca originea coordonatelor sistemului K' se mişcă cu viteza –v pe axa Ξ. La momentul t=0, fie ca cele trei origini să coincidă, iar când t=x=y=z=0, fie ca timpul t'=0 în K'. Numim coordonatele măsurate în K':x', y', z' şi prin o aplicare de două ori a ecuațiilor noastre de translație obținem:
$$t' = \Phi(-v)\beta(-v)(\tau + \frac{v\xi}{c^2})$$
$$x' = \Phi(-v)\beta(-v)(\xi + vt)$$
$$y' = \Phi(-v)\eta$$
$$z' = \Phi(-v)\zeta$$
and then

$$t' = \Phi(v)\Phi(-v)t$$
$$x' = \Phi(v)\Phi(-v)x$$
$$y' = \Phi(v)\Phi(-v)y$$
$$z' = \Phi(v)\Phi(-v)z$$

Deoarece relațiile dintre x', y', z' şi x, y, z nu conțin timpul t, sistemele K şi K' sunt în repaus unul față de altul. De aceea, transformarea de la K la K' trebuie să fie transformarea identică. Aşadar $\Phi(v)\Phi(-v) = 1$.

Acum ne concentrăm pe semnificația lui Φ(v). Ne concentrăm pe partea axei Y a sistemului k care stă între ξ=0, η=0, ζ=0 and ξ=0, η=l, ζ=0. Această parte a axei Y este un băț ce se mişcă perpendicular pe axa sa cu o viteză v relativă la sistemul K. Capetele lui au in K coordonatele: $x_1 = vt, y_1 = \frac{1}{\Phi(v)}, z_1 = 0$. Lungimea bățului măsurată în K este aşadar $\frac{l}{\Phi(v)}$. Şi aceasta ne dă semnificația funcției Φ(v). Din motive de simetrie este acum evident că lungimea unui anumit băț care se mişcă perpendicular pe axa sa, măsurată în un sistem staționar, trebuie să depindă numai de viteză şi nu şi de direcția sau sensul mişcării. Lungimea bățului mobil măsurată în sistemul staționar nu se schimbă, aşadar, dacă v şi –v sunt schimbate între ele. De aici obținem $\frac{l}{\Phi(v)} = \frac{l}{\Phi(-v)}$, sau

Φ(v)=Φ(-v).

Rezultă din această relație şi cea pe care am găsit-o înainte că Φ(v)=1, astfel că relațiile transformare pe care le-am găsit devin:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$\xi = \beta(x - vt)$$
$$\eta = y$$
$$\zeta = z, where$$
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4. Sensul fizic al ecuațiilor obținute în legătură cu corpuri rigide în mişcare şi ceasuri în mişcare

Ne imaginăm o sferă rigidă 6) de rază R, în repaus față de sistemul mobil k, cu centrul în originea sistemului de coordonate k. Ecuația suprafeței acestei sfere care se mişcă relativ la sistemul K cu viteza v este $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$.

Ecuația acestei ecuații exprimată în funcție de x, y, z la timpul t=0 este

$$\left(\frac{x}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Un corp rigid care este o sferă când este măsurat în repaus devine un elepsoid de revoluție atunci când este mobil si este văzut din un sistem staționar, cu axe date de $R\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, R, R$.

Astfel, chiar dacă dimensiune Y şi Z ale sferei apar nemodificate (aceastea este deci valabil oricărui corp, de orice formă), dimensiunea X apare mai mică în proporția $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, adică, cu cât v este mai mare, cu atât mai pronunțată este scurtatea. Toate obiectele care se mişcă cu v=c apar deduse la o figură plană. Pentru viteze mai mari ca aceea a luminii, raționamentul nostru devine lipsit de sens. Vom vedea, totuşi, că în ceea ce urmează, că viteza luminii joacă în teoria noastră rolul unei viteze infinit de mari.

Este clar că aceleaşi rezultate rămân valabile pentru corpuri în repaus în sistemul „staționar”, atunci când sunt văzute din un sistem în mişcare uniformă.

Mai departe, ne imaginăm un ceas care poate măsura timpul t când este în repaus față de un sistem staționar şi timpul τ când este în repaus față de sistemul mobil. Acesta se găseşte localizat în originea coordonatelor k şi este astfel acordat încât măsoară timpul τ. Care este timpul acestui ceas, când este văzut din sistemul staționar?

Între cantitățile x, t, τ care se referă la poziția ceasului, avem, evident

$$x = vt$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

De aceea, $\tau = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t - t\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$.

Aşadar, timpul arătat de un ceas (văzut în sistemul staționar) este mais încet cu $\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$ secunde la fiecare secunde, sau neglijând mărimile la puterea a patra sau a şasea, cu $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$.

De aici rezultă următoarea consecință ciudată. Dacă în punctele A şi B din K se găsesc ceasuri staționare care, văzute din sistemul staționar, sunt sincronizate şi dacă ceasul din A este deplasat cu viteza b de-a lungul liniei AB spre b, când ajunge în B cele două ceasuri nu mai sunt sincronizate, dar ceasul mutat din A în B a rămas în urma celui rămas în B cu $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}t$ (puterea a patra şi mai mare fiind neglijate), t fiind timpul cât a durat călătoria din A în B.

Pare imediat că rezultatul rămâne valabil dacp ceasul din A se deplasează în B de-a lungul unei linii poligonale şi de asemenea când punctele A şi B coincid.

Dacă presupunem că rezultatul dat de o linie poligonală este de asemenea valid pentru a linie continuă, curbă, ajungem la acest rezultat: dacă unul din cele două ceasuri sincronizate din A este mutat de-a lungul unei curbe închise cu viteza constantă v până se întoarce înapoi în A, călătoria durând t secunde, atunci acest ceas va fi cu $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}t$ secunde mai încet decât cel rămas în A. Astfel putem conchide că un ceas de balanță la ecuator trebuie să meargă mai încet, cu o diferență foarte mică, decât un ces similar găsindu-se la unul din poli în condiții indentice în rest.

5. Compoziția vitezelor.

In un sistem k care se mută de-a lungul axei X a sistemului K cu viteza v, fie un punct ce se mişcă în acord cu ecuațiile: $\xi = \omega_\xi \tau, \eta = \omega_\eta \tau, \zeta = 0.$ where ω_ξ and ω_η are constants.

Se cere mişcarea punctului relativ la sistemul K. Dacă introducem mărimile x, y, z, t în ecuația punctului, cu ajutorul transformărilor dezvoltate la punctul 3), obținem:

$$x = \frac{\omega_\xi + v}{1 + \frac{v\omega_\xi}{c^2}} t$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\omega_\xi}{c^2}} \omega_\eta t$$

$$z = 0$$

Astfel, legea paralelogramelor vitezelor este validă conform teoriei noastre numai în primă aproximarție. Stabilim:

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$\omega^2 = \omega_\xi{}^2 + \omega_\eta{}^2$$
$$a = \tan^{-1}\frac{\omega_\eta}{\omega_\xi}$$
, a trebuie considerat ca unghiul între vitezele v şi ω. După un calcul simplu obţinem:

$$V = \frac{\sqrt{\left(v^2 + \omega^2 + 2v\omega\cos a\right) - \left(\frac{v\omega\sin a}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v\omega\cos a}{c^2}}$$

Este demn de remarcat ca v şi ω întră în expresia vitezei rezultante în un mod simetric. Dacă şi ω are direcţia axei X, obţinem atunci: $V = \frac{v + \omega}{1 + \frac{v\omega}{c^2}}$. Urmează din această ecuaţie că pentru o compunere a două viteze care sunt fiecare mai mici decât c, rezultanta este întotdeauna o viteză mai mică decât c. Dacă stabilim $v = c - k, \omega = c = \lambda$, k, λ fiind numere pozitive şi mai mici decât c, atunci $V = c\frac{2c - k - \lambda}{2c - k - \lambda + \frac{k\lambda}{c}} < c$.

Rezultă, de asemenea, că viteza luminii nu poate fi alterată prin combinare cu o altă viteză mai mică decât c: $V = \frac{c + \omega}{1 + \frac{w}{c}} = c$.

Am fi putut obţine formula pentru V, in cazul în care v şi ω au aceea direcţie, compunând două tranformări în acord cu 3). Dacă în plus faţă de sistemul K şi k din 3) intruduce un alt sistem de coordoante k' care se mişcă paralel la k, punctul lui iniţial mişcându-se de-a lungul axei Ξ cu viteza ω, obţinem ecuaţii între marimile x, y, z, t şi mărimile corespunzătoare din k' care diferă de cele din 3) numai acolo că în loc de „v" este luată cantitatea $\frac{v + \omega}{1 + \frac{v\omega}{c^2}}$, din care vedem că aceste transformări paralele formează (şi este necesar să formeze) un grup.

Am dedus astfel legile cinematicii corespunzând celor două principii şi procedăm acum la aplicarea lor la electrodinamică.

II. Partea electrodinamică

6. Transformarea ecuațiilor Maxwell-Hertz pentru spațiul gol. Despre natura forțelor electromotrice prezente în un spațiu magnetic în timpul mişcării.

Fie ca ecuațiile Maxwell-Hertz pentru spațiul vid să fie valabile pentru un sistem staționar K, astfel încât să avem:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

unde (X,Y,Z) reprezintă vectorul forță electrică, iar (L, M, N) cel al forței magnetice.

Daca aplicăm acestor ecuații transformările dezvoltate la punctul 3, raportând procesele electromagnetice la sistemele de coordonate introduse acolo, sistem ce se mişcă cu viteza c, vom obține ecuațiile:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \varsigma}\left[\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)\right]$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right)\right] = \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \varsigma}\left[\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)\right]$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)\right] - \frac{\partial L}{\partial \eta}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \varsigma}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)\right]$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)\right] - \frac{\partial X}{\partial \zeta}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)\right] = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right)\right]$$

unde $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Acum principiul de relativitate cere ca ecuațiile Maxwell – Hertz pentru spațiul vid să țină şi pentru sistemul k dacă țin pentru sistemul K. Aceasta înseamnă că vectorii forțelor electrică şi magnetică definiți prin (X’,Y’,Z’) şi (L’, M’, N’) în sistemul k, care sunt definite prin efectele lor asupra maselor electrice, respectiv magnetice, satisfac următoarele relații:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \varsigma}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \varsigma} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \varsigma} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \varsigma}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

Evident cele două sisteme de ecuații găsite pentru sistemul k trebuie să exprime exact acelaşi lucru, deoarece ambele sisteme de ecuații sunt echivalente cu ecuațiile Maxwell – Hertz pentru sistemul K. Deoarece mai departe ecuațiile celor două sisteme sunt identice, cu excepția simbolurilor vectorilor, rezultă că funcțiile ce apar în sistemele de ecuații în locurile corespunzătoare trebuie să coincidă, cu excepția factorului ψ(v), care sunt comune pentru toate funcțiile ale unui sistem de ecuații şi care este independenet de $\xi, \eta, \varsigma, \tau$ dar depinde de v. Astfel avem relațiile:

$$X' = \psi(v) X$$
$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right)$$
$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)$$
$$L' = \psi(v) L$$
$$M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)$$
$$N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)$$

Dacă formulăm acum sistemul de ecuații reciproc acestuia, în primul rând rezolvând ecuațiile ce doar le-am obținut şi apoi aplicând ecuațiile acestea transformării inverse (de la k la K), care este caracterizată de viteza –v , rezultă că cele două sisteme de ecuații obținute astfel trebuie să fie identice, adică $\psi(v)\psi(-v)=1$. Mai departe, din motive de simetrie, $\psi(v)=1$ şi ecuațiile noastre devin:

$$X' = X$$

$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right)$$

$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)$$

$$L' = L$$

$$M' = \beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)$$

$$N' = \beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)$$

Cât priveşte interpretarea acestor ecuații, facem următoarele remarci: Fie o sarcină electrică să aibă valoarea „unu" când este măsurată în un sistem staționar K, adică acesta exercită o forță de o dină (?) asupra unei cantități de electricitate de aceeaşi valoare situată la un cm depărtare. Datorită principiului de relativitate, această sarcină are valoarea „unu" şi când este măsurată în sistemul mobil. Dacă această cantitate de electricitate este în repaus față de sistemul la sistemul mobil (cel puțin în clipa la care ne referim), atunci forța ce acționează asupra ei, măsurată în sistemul mobil, este egală cu vectorul (X',Y',Z') . Astfel, primele trei ecuații de mai sus pot fi exprimate în cuvinte în felul următor:

1. Dacă o sarcină electrică de valoare unitate este în mişcare în un câmp electromagnetic, atunci acționează asupra ei, în plus față de forța electrică, o „forță electromotrice" care, dacă neglijăm termenii în puterea a doua sau puteri mai mari ale lui $\frac{v}{c}$, este egală cu produsul vectorial între viteza sarcinii şi forța magnetică, împărțit totul la viteza luminii. (Vechiul mod de exprimare).
2. Dacă o sarcină electrică de valoare unitate se găseşte în mişcare în un câmp electromagnetic, forța care acționează asupra ei este egală cu forța electrică care este prezentă în localitatea sarcinii şi pe care o prezentăm prin transformarea câmpului în un sistem de coordonate în repaus față de sarcina electrică. (Noul mod de exprimare).

Analogia ține cu „forța magnetomotrice". Vedem cum forța electromotrice abia joacă în dezvoltatea teoriei partea unui concept auxiliar, care datorează introducerea ei circumstanței cum că forțele electrice şi magnetice nu există independent de starea de mişcare a sistemului de coordonate.

Mai mult, observăm că asimetria de care vorbeam la început, când consideram curenții produşi de mişcarea relativă a unui magnet şi a unui conductor, dispare acum. Ba chiar, întrebări despre „locul” forțelor electromotrice electrodinamice (maşini unipolare) nu au nici un rost acum.

7. Teoria principiului Doppler şi a aberației

În sistemul K, foarte departe de originea coordonatelor, să considerăm o sursă de unde electromagnetice, care în o parte a spațiului care conține originea coordonatelor poate fi reprezentată cu un foarte bun grad de precizie aproximativ prin ecuațiile:

$$X = X_0 \sin\Phi$$
$$Y = Y_0 \sin\Phi$$
$$Z = Z_0 \sin\Phi$$
$$L = L_0 \sin\Phi$$
$$M = M_0 \sin\Phi$$
$$N = N_0 \sin\Phi$$

unde $\Phi = \omega\left[t - \frac{1}{c}(lx + my + nz)\right]$

Aici (X_0,Y_0, Z_0) (L_0, M_0, N_0) sunt vectorii care definesc amplitudinea trenului de unde, iar l, m, n valorile cosinului director ale vectorului de undă. Dorim să ştim structura acestor unde, atunci când sunt examinate de un observator în repaus în sistemul mobil k.

Aplicând ecuațiilor de transformare găsite în 6) pentru forțele electrice şi magnetice, precum şi cele găsite în 3) pentru cooridinate şi pentru timp, obținem direct:

$$X' = X_0 \sin\Phi'$$
$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{c}N_0\right)\sin\Phi'$$
$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{c}M_0\right)\sin\Phi'$$
$$L' = L_0 \sin\Phi'$$
$$Y' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{c}Z_0\right)\sin\Phi'$$
$$Y' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{c}Y_0\right)\sin\Phi'$$
$$\Phi' = \omega'\left[\tau - \frac{1}{c}(l'\xi + m'\eta + n'\varsigma)\right],$$

$$\omega' = \omega\beta\left(1 - l\frac{v}{c}\right)$$

$$l' = \frac{l - \frac{v}{c}}{1 - l\frac{v}{c}}$$

unde

$$m' = \frac{m}{\beta\left(1 - l\frac{v}{c}\right)}$$

$$n' = \frac{n}{\beta\left(1 - l\frac{v}{c}\right)}$$

Din ecuația pentru ω' rezultă că dacă un observator se mişcă cu viteza v față de o sursă de lumină de frecvență ν situată la o distanță infinită față de observator, linia „sursă-observator" făcând un unghi ϕ cu viteza observatorului față de sistemul de coordonate care este în repaus față de sursa de lumină, frecventa ν' observată de observator este dată de ecuația:

$$\nu' = \nu\frac{1 - \cos\Phi \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Acesta este principiul Doppler pentru absolut orice viteză. Când ϕ=0, ecuația ia forma foarte simplă:

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Observăm că, contrar punctului de vedere obişnuit, când $v = -c, \nu' = -\infty$.

Daca numim unghiul dintre vectorul de undă (direcția razei) în sistemul mobil şi linia ce leagă „ sursă-observator" ϕ', ecuația petru ϕ' iar următoarea formă:

$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi - \frac{v}{c}}{1 - \cos\phi\frac{v}{c}}$$

Această ecuație exprimă regula aberației în cazul cel mai general. Dacă $\phi = \frac{1}{2}\pi$, ecuația devine pur şi simplu: $\cos\phi' = -\frac{v}{c}$

Mai avem încă de înțeles amplitudinea undei, aşa cum apare în sistemul mobil, Dacă numim amplitudinea forței electrice sau forței magnetice A, respectiv A', după cum este măsurată în sistemul staționar sau în sistemul mobil, obținem:

$$A'^2 = A^2 \frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}$$

Din aceasta rezultă că un observator ce se apropie de o sursă de lumină cu viteza c, vede sursa ca având intensitate infinită.

8. Transformarea energiei razelor de lumină. Teoria presiunii radiației exercitată asupra reflectorilor perfecți.

Deoarece $\frac{A^2}{8\pi}$ este egal cu energia luminii pe unitatea de volum, trebuie să privim $\frac{A'^2}{8\pi}$, prin principiul relativității, ca energia luminii în sistemul de referință mobil. Astfel, $\frac{A'^2}{A^2}$ ar fi raportul între energia „măsurată în mişcare" şi „măsurată în repaus" a unui anumit sistem de lumină, dacă volumele ar fi la fel, măsurate în K şi în k. Dar acesta nu este cazul. Dacă l, m, n sunt valorile cosinusurilor directori ai vectorilor de undă ai luminii în sistemul staționar, nici o energie nu trece prin pereții unei suprafețe sferice ce se deplasează cu viteza luminii:

$$(x-lct)^2 + (y-mct)^2 + (z-nct)^2 = R^2$$

Putem spune, aşadar, că această suprafață înconjoară mereu acelaşi sistem de lumină. Ne întrebăm atunci care este cantitatea de energie înconjurată de această suprafață, văzută în sistemul k, adică cantitatea de energie a luminii relativ la sistemul k.

Suprafața sferică, văzută în sistemul mobil, este o suprafață elipsoidală, ecuația căruia, la momentul $\tau = 0$ este următoarea:

$$\left(\xi - l\beta\xi\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\eta - m\beta\xi\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\varsigma - n\beta\xi\frac{v}{c}\right)^2 = R^2$$

Dacă S este volumul sferei şi S' cel al elipsoidului, obținem prin o calculare simplă:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\cos\phi\frac{v}{c}}.$$

Astfel, dacă numim E energia luminii când este înconjurată de suprafața în repaus şi E' când este măsurată în sistemul mobil, obținem:

$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2 S'}{A^2 S} = \frac{1 - \cos\phi \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, iar această formulă se simplifică când ϕ=0 în următoarea:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Este remarcabil că energia şi frecvenţa unui complex de lumină depind de starea de mişcare a observatorului după aceeaşi lege.

Să considerăm acum planul de coordonată $\xi = 0$ să fie o suprafaţă peferct reflectătoare, de care sunt reflectate undele plane considerate în 7). Căutăm să vedem care este presiunea exercitată de lumină pe suprafaţa reflectătoare şi care este direcţia, frecvenţa şi intensitatea luminii după reflecţie.

Fie ca lumina incidentă să fie experimată prin cantităţile A, cos ϕ, ν (relativ la sistemul K). Văzut din k, mărimile respective sunt:

$$A' = A \frac{1 - \cos\phi \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi - \frac{v}{c}}{1 - \cos\phi \frac{v}{c}}$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\phi \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pentru lumina reflectată, discutând procesul în sistemul k, obţinem:

$$A'' = A'$$

$$\cos\phi'' = -\cos\phi'$$

$$\nu'' = \nu'$$

În sfârşit, transformând înapoi în sistemul K, obţinem pentru lumina reflectată:

$$A''' = A'' \frac{1 + \cos\phi'' \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = A \frac{1 - 2\cos\phi \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\cos\phi''' = \frac{\cos\phi'' + \frac{v}{c}}{1 + \cos\phi'' \frac{v}{c}} = -\frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\cos\phi - 2\frac{v}{c}}{1 - 2\cos\phi \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \cos\phi'' \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \nu \frac{1 - 2\cos\phi \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Energia (cea măsurată în sistemul staționar) care este incidentă pe o suprafață unitate a oglinzii în unitatea de timpm este $\frac{A^2(c\cos\phi - v)}{8\pi}$. Energia ce părăseşte suprafața unitate a oglinzii în unitatea de timp este $\frac{A'''^2\,(c\cos\phi - v)}{8\pi}$. Diferența între aceste două expresii este, prin principiul energiei, lucrul mecanic efectuat de presiunea luminii în unitatea de timp. Dacă scriem acest lucru mecanic ca produsul Pv, unde P este presiunea luminii, atunci: $P = 2\frac{A^2(c\cos\phi - v)^2}{8\pi\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$.

În acord cu experiența şi cu alte teorii, obținem în o primă aproximație: $P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\phi$.

Toate probleme în optica corpurilor în mişcare pot fi rezolvate prin metoda folosită aici. Este esențial că forța electrică sau magnetică a luminii care este influențată de un corp în mişcare, poate fi transformată în un sistem de coordonate în repaus față de acest corp. Astfel, toate problemele din optica corpurilor în mişcare pot fi reduse la probleme în optica corpurilor staționare.

9. Transformarea ecuațiilor Maxwell-Hertz când curenți de convecție sunt luați în considerare.

Începem cu ecuațiațiile:

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial X}{\partial t}+u_x\rho\right]=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}$$
$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial Y}{\partial t}+u_y\rho\right]=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}$$
$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial Z}{\partial t}+u_z\rho\right]=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}$$

unde $\rho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ este egal cu 4π înmulțită cu densitatea de electricitate şi (u_x, u_y, u_z) vectorul de viteză al sarcinii. Dacă ne imaginăm ca sarcina electrică să se cupleze invariabil cu corpuri mici şi rigide (ioni, electroni), aceste ecuații sunt baza electromagnetică a electrodinamicii lorentziene şi ale opticii corpurilor în mişcare.

Fie aceste ecuații valabile în sistemul K şi să le transformăm în sistemul k cu ajutorul ecuațiilor de transformare de la punctele 3) şi 6). Obținem atunci aceste ecuații:

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial X'}{\partial \tau}+u_\xi\rho'\right]=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \varsigma}$$
$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial Y'}{\partial \tau}+u_\eta\rho'\right]=\frac{\partial L'}{\partial \varsigma}-\frac{\partial N'}{\partial \xi}$$
$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \tau}+u_\varsigma\rho'\right]=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \varsigma}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \varsigma}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial \tau}=\frac{\partial X}{\partial \eta}-\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

$$u_\xi = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

unde $u_\eta = \frac{u_x}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$

$$u_\varsigma = \frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

şi $\rho' = \frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = \beta\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)\rho$

După cum rezultă din teorema de compunere a vitezelor (capitolul 5)), vectorul $(u_\xi, u_\eta, u_\varsigma)$ nu este altceva decât viteza sarcinii electrice măsurată în sistemul k, aşadar avem dovada că, pe baza principiilor cinematice, baza electrodinamică a teoriei lui Lorentz despre electrodinamica corpurilor în mişcare este în acord cu principiul relativităţii.

Mai departe aş dori să remarc rapid că din ecuaţiile dezvoltate se poate deduce foarte uşor următoarea lege foarte importantă. Dacă un corp încărcat electric este în mişcare oriunde în spaţiu fără să îşi modifice sarcina faţă de un sistem de coordonate ce se mişcă o dată cu corpul, atunci sarcina sa rămâne consntată şi în sistemul „staţionar” K.

10. Dinamica electronului accelerat uşor.

Fie o particulă încărcată electric în mişcare în un câmp electromagnetic (în continuare va fi numită „electron”). Pentru legea ei de mişcare, presupunem următoarele:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z$$

unde x, y, z reprezintă coordonatele electronului, iar m este masa electronului, atât timp cât mişcarea lui este lentă.

În al doilea rând, fie ca viteza electronului la un anumit moment să fie v. Căutăm legea de mişcare a electronului în momentele imediat următoare.

Fără a pierde din generaltitatea concluziilor noastre, putem presupune şi vom presupune că electronul se găseste la momentul care ne interesează la originea sistemului de coorodonate şi se mişcă cu viteza v de-a lungul axei X a sistemului K. Este clar că la acel moment (t=0) elecronul se găseşte în repaus relativ la sistemul de coordonate care este în mişcare paralelă cu viteza v de-a lungul axei X.

Din prespunerea de mai sus, împreună cu principiul de relativitate, este clar că în momentele imediat urmatoare (pentru valori mici ale lui t), văzute din sistemul k, ecuațiile de mişcare au următoarea formă:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \varepsilon X'$$
$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = \varepsilon Y'$$
$$m\frac{d^2\varsigma}{dt^2} = \varepsilon Z'$$

în care simbolurile $\xi, \eta, \varsigma, X', Y', Z'$ se referă la sistemul k. Dacă mai departe decidem că atunci când t=x=y=z=0, atunci $\tau = \xi = \eta = \varsigma = 0$, obținem că transformările din 3 şi 6

$$\xi = \beta(x - vt), \eta = y, \varsigma = z, \tau = \beta\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

sunt valabile, astfel încât avem:

$$X' = X, Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right), Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right)$$

Cu ajutorul acestor ecuații transformăm ecuațiile de mai sus din sistemul k în sistemul K, obținând:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{m\beta^2}X$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{m\beta^2}\left(Y - \frac{v}{c}N\right)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{m\beta^2}\left(Z + \frac{v}{c}M\right)$$

Revenind la punctul de vedere obişnuit, întrebăm care este masa „longitudinală” şi care este masa „transversală” a electronului. Scriem ecuațiile (A) în forma:

$$m\beta^2\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X'$$
$$m\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right) = \varepsilon Y'$$
$$m\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right) = \varepsilon Z'$$

şi remarcăm în primul rând că $\varepsilon X', \varepsilon Y', \varepsilon Z'$ sunt componentele forței ponderomotrice care acționează asupra electronului şi sunt într-adevăr văzute în un sistem mişcându-se în acelaşi moment cu electronul, cu aceeaşi viteză cu electronul. (Această forță ar putea fi măsurată, de exemplu, de o balanță cu arc în repaus în ultimul sistem menționat). Dacă numim acum această forță pur şi simplu „forța care acționează asupra electronului” şi menținem ecuația masa ori accelerația egal forța, dacă alegem ca accelerația să fie măsurată în sistemul staționar K, deducem din următoarele ecuații:

masa longitudinală = $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

masa transversală = $\frac{m}{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Cu o altă definiție a forței şi accelerației am obține în mod natural alte valori ale maselor. Aceasta arată că trebuie să fim foarte atenți când comparăm diferite teorii despre mişcarea electronului.

Remarcăm că aceste rezultate despre masă sunt de asemenea valabile pentru puncte materiale ponderabile, deoarece un punct material ponderabil poate fi făcut să fie un electron (în acceptul nostru al cuvântului) prin adiționarea unei sarcini electrice, *oricât de mici ar fi*.

Vom determina acum energia cinetică a electronului. Dacă un electron porneşte din repaus din orginea coordonatelor sistemului K de-a lungul axei X sub acțiunea unei forțe electrostatice X, este clar că energia sustrasă câmpului electrostatic are valoarea $\int \varepsilon X dx$. Cum electronul este accelerat uşor şi astfel nu pierde energie deloc sub formă de radiație, energie sustrasă câmpului electromagnetic trebuie să fie egală cu energia cinetică W a electronului. Luând în considerare că pe durata întregului proces de mişcare considerat, prima din ecuațiile A este valabilă, obținem aşadar:

$$W = \int \varepsilon X dx = m\int_0^v \beta^3 v dv = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right]$$

Astfel, când v=c, W devine infinită. Vitezele mai mari ca viteza luminii, precum în rezultatele noastre precedente, nu pot exista.

Această expresie pentru energia cinetică trebuie să fie valabilă şi pentru corpurile ponderabile, în virtutea raționamentului de mai sus.

Enumerăm acum proprietățile mişcării electronului care rezultă din sistemul de ecuații A şi care sunt accesibile experimentului:

1. Din a doua ecuație a sistemului A rezultă că o forță electrică Y şi o forță magnetică N acțiuni de deviere la fel de puternice asupra unui electron ce se mişcă cu viteza v, atunci când Y=Nv/c. Astfel vedem că este posibil ca din teoria noastră să determinăm viteza electronului din raportul între puterea magnetică de deflexie A_m şi puterea electrică de deflecție A_e, pentru orice viteză, aplicând legea: $\frac{A_m}{A_e}=\frac{v}{c}$.Această relație poate fi testată experiemental, deoarece viteza electronului poate fi măsurată în mod direct, de exemplu prin intermediul câmpurilor electrice şi magnetice puternic oscilante.

2. Din deducerea energiei cinetice a electronului rezultă că între diferența de potențial traversată P şi viteza achiziționată de electron v, trebuie să existe o relație:

$$P=\int Xdx=\frac{m}{\varepsilon}c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right]$$

3. Calculăm raza de curbură a traiectoriei electronului când o forță magnetică N este prezentă (ca unica forță deflectoare), acționând perpendicular pe viteza electronului. Din a doua ecuație din A rezultă:

$$-\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{v^2}{R}=\frac{\varepsilon}{m}\frac{v}{c}N\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \text{ sau } R=\frac{mc^2}{\varepsilon}\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{N}$$

Aceste trei relații sunt o expresie completă a legilor după care electronul trebuie să se mişte după teoria avansată aici.

În concluzie doresc să spun pentru lucrul la această problemă am avut ajutorul loial al prietenului şi colegului meu dl. Besso şi îi sunt dator pentru câteva sugestii valoroase.